3. Подставляя значения конечно-интегральных разностей, представленных верхними значениями в колонках таблицы 4.19 и $h_k = 5 - 1 = 4$ в формулу (4.62), получаем сглаживающий полином

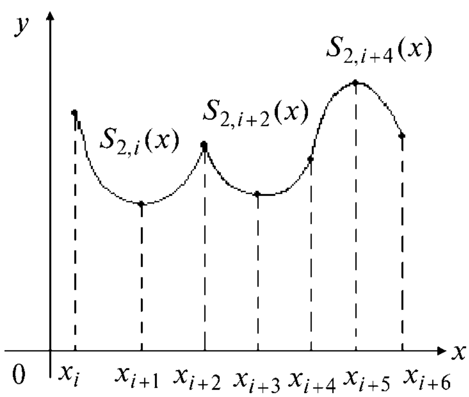
$$S_3(x) = 0{,}2804 + 0{,}0682 \cdot (x - 1) - 0{,}07137 \cdot (x - 1)^2 - 0{,}00105 \cdot (x - 1)^3.$$

Рассчитывая среднеквадратичную погрешность для сглаживающего многочлена, получаем значение $\delta = 0{,}11$, которое приблизительно равно ε. Это свидетельствует об обоснованности применения метода сглаживания многочленом наилучшего интегрального приближения. Отличие многочлена $S_3(x)$ от самой функции $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1; 5]$ не превышает 0,064.■

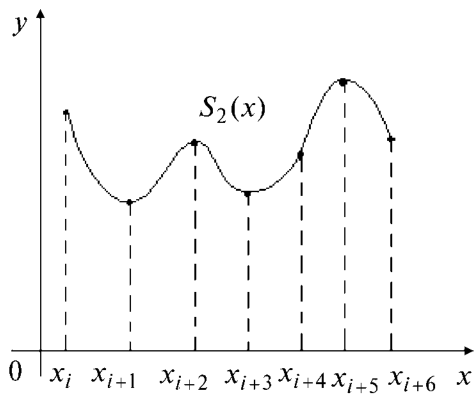
4.5. МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И СГЛАЖИВАНИЯ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВ

4.5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Как отмечалось в п. 4.1, в вычислительной практике при глобальном способе аппроксимации высокие степени интерполяционных многочленов использовать нецелесообразно. Поэтому часто применяется кусочно-глобальный способ на основе, например, линейной и квадратичной (параболической) интерполяции. Однако производные таких интерполяционных многочленов, получающихся на частичных отрезках, в местах их стыка терпят разрывы. На рисунке 4.10*а* показано поведение совокупности трех таких параболических многочленов (звеньев). Легко видеть, что производные в точках стыка частичных отрезков (шаблонов (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), $(x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4})$, $(x_{i+4}, x_{i+5}, x_{i+6})$) терпят разрывы. Это является крайне нежелательным, если вся совокупность $\bigcup_i S_{2,i}(x)$ далее используется, например, для аппроксимации обводов конструктивных элементов сложных поверхностей. Для аппроксимации таких поверхностей требуется задание в узлах не только значений



а



б

Рис. 4.10

$S_{k,i}(x_i)$, но и первой производной $S'_{k,i}(x_i)$ или даже второй производной $S''_{k,i}(x_i)$. Таким образом, вместе с функцией $y_i = f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$, требуется достаточно хорошо аппроксимировать и ее производные. Если восполняемая функция достаточно гладкая, то и ее производные тоже гладкие, и поэтому они должны быть непрерывными во всех внутренних узлах. В связи с этим к аппроксимирующим функциям $S_m(x)$ (m — степень многочлена) предъявляются требования непрерывности $S_m(x)$, $S'_m(x)$ и по возможности $S''_m(x)$ или $S'''_m(x)$ во всех точках $x \in [a, b]$ (рис. 4.10*б*). Это и обусловливает необходимость построения сплайн-функций, обладающих указанными свойствами и имеющих интерполяционный или сглаживающий характер.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сеточная функция $y_i = f(x_i)$ на сетке Ω_n. Требуется восполнить ее функцией $S_m(x)$, где m — степень многочлена, кусочно-глобальным способом.

Дадим сначала упрощенное определение сплайна, которое затем уточним.

Сплайн-функцией или *сплайном* называется совокупность $S_{m,i}(x)$ алгебраических многочленов степени m (звеньев), определенных на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$, и соединенных вместе по всем частичным отрезкам так, чтобы можно было составить многозвенную функцию $S_m(x)=\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} S_{m,i}(x)$, определенную и непрерывную на всем отрезке $[a, b]$ вместе со всеми своими производными $S_m^{(p)}(x)$ до некоторого их порядка $p = 1, 2, \ldots$

Разность между m и наибольшим порядком производной, непрерывной на отрезке $[a, b]$, определяет *дефект сплайна q*.

Условиями согласования звеньев $S_{m,i}(x)$ сплайна с исходной функцией $y_i = f(x_i)$ на соответствующем частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ называются условия, накладываемые на невязки дифференциального и интегрального типов $\delta S_{m,i}^{(p)}(x_i)$, $\delta S_{m,i}\left(I_i^{i+1}\right)$ и использующиеся для вывода формулы одного звена сплайна на указанном частичном отрезке.

Сплайн, удовлетворяющий условиям (4.3) нулевых функциональных невязок, называется *интерполяционным*, а удовлетворяющий только интегральным условиям (4.5), — *сглаживающим* или *интегрально-сглаживающим*.

Сплайн, построение которого основано только на дифференциальных условиях согласования (4.2) при $p = 0,1$ или $p = 0,2$, называется *дифференциальным* (*Д-сплайном*). Если же наряду с дифференциальными условиями согласования используется интегральное условие вида (4.5), то сплайн называется *интегрально-дифференциальным* (*ИД-сплайном*). Сплайны такого типа впервые предложены в [16–23].

Количество условий согласования, необходимых для получения формулы одного звена сплайна, должно соответствовать степени сплайна (число условий на единицу больше m). После определения формулы $S_{m,i}(x)$ ее правая часть выражается через известные и неизвестные величины (параметры): $f^{(p)}(x_i)$ — для дифференциального сплайна или через совокупность $f^{(p)}(x_i)$ и $I_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ — для интегрально-дифференциального. Эти величины будут называться *параметрами* сплайна. В зависимости от того, заданы те или иные параметры сплайна в постановке задачи или нет, они именуются *определенными* или *неопределенными*. Последние вычисляются на основе условий непрерывности (гладкости) сплайна $S_m(x)$, которые здесь называются *условиями стыковки*. Для некоторого узла x_i, общего для звена $S_{m,i-1}(x)$, относящегося к частичному отрезку $[x_{i-1}, x_i]$, и звена $S_{m,i}(x)$, определенного на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, это условие имеет вид

$$S^{(p)}_{m,i-1}(x)\big|_{x=x_i} = S^{(p)}_{m,i}(x)\big|_{x=x_i}.$$

При решении задачи аппроксимации с помощью сплайн-функций условия стыковки преобразуются к соотношениям, связывающим определенные и неопределенные параметры, которые называются *параметрическими соотношениями* (уравнениями).

Параметрические соотношения, записанные в виде уравнений, могут использоваться для нахождения неопределенных параметров применительно к сплайн-аппроксимации либо для выражения одних параметров через другие. Последний способ в данной книге применяется для вывода новых типов формул численного дифференцирования и интегрирования (см. главу 5). Кроме того, параметрические соотношения на основе изложенного во введении принципа согласования порядков численных величин устанавливают соответствие этих порядков для различных параметров, входящих в то или иное соотношение.

При решении задачи сплайн-аппроксимации необходимо предварительно вычислить неопределенные параметры сплайна для всех его звеньев. Этот этап соответствует решению *параметрической задачи*. Для пояснения ее характера введем понятие *порядка параметров* сплайн-функции, который обозначим через l. Этот порядок зависит от порядка производных исходной функции $y = f(x)$: для параметра I_i^{i+1} примем $l = -1$, а для $f^{(p)}(x_i)$ положим $l = p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$.

Параметрическая задача называется *прямой* (*обратной*), если порядки всех неопределенных параметров больше (меньше) порядков определенных параметров. Если в задаче аппроксимации порядки одних неопределенных параметров больше, а порядки других меньше порядков определенных параметров, то параметрическая задача называется *смешанной*. Данная классификация используется далее при описании конкретных методов построения параболических интегрально-дифференциальных сплайн-функций.

Две совокупности параметров, относящиеся к параметрическим уравнениям и сплайнам разных степеней, называются *подобными*, если они могут быть получены друг из друга путем соответствующего изменения порядков параметров l на одинаковую величину.

Параметрические уравнения или их системы, соответствующие двум сплайнам разных степеней, называются *подобными*, если они включают подобные параметры и имеют одинаковые коэффициенты, зависящие от шагов, определяющих сетку.

Два или несколько сплайнов различных степеней называются *подобными*, если формулы звеньев можно получить друг из друга путем дифференцирования или интегрирования и замены всех параметров одного сплайна соответствующими подобными параметрами другого сплайна.

Сплайн называется *локальным*, если все неопределенные параметры, относящиеся к каждому его звену $S_{m,t}(x)$, $t = i$, при $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, находятся локально, т. е. независимо от параметров, характеризующих все остальные (или почти все остальные) звенья $S_{m,t}(x)$ ($t = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n-1$).

Сплайн-аппроксимация (как правило, это интерполяция) локальными сплайнами сводится, таким образом, к получению конкретных значений коэффициентов многочленов $S_{m,i}(x)$ для каждого звена результирующего сплайна $S_m(x)$ и неопределенных параметров путем их вычисления по аппроксимационным формулам. Недостаток локальной интерполяции состоит в том, что таким способом не удается обеспечить минимальный дефект сплайна, т. е. максимально возможную его гладкость в смысле непрерывности производных как можно большего порядка ($p = 0, 1, 2, \ldots$).

Альтернативой локальному сплайну является *глобальный сплайн*, для которого неопределенные параметры, относящиеся к каждому его звену $S_{m,t}(x)$, $t = i$, при $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, находятся совместно с параметрами, характеризующими все остальные звенья $S_{m,t}(x)$, $t \neq i$. Неопределенные параметры в глобальных сплайнах для всех звеньев вычисляются, как правило, путем решения системы линейных алгебраических уравнений трехдиагонального вида методом прогонки, причем это обеспечивает непрерывность одной из производных, а именно той, которая не включена в условия согласования. Если в условие согласования включена производная другого порядка, то ее непрерывность также гарантируется. Глобальный способ аппроксимации по сравнению с локальным способом обеспечивает минимально возможный дефект сплайна. Поэтому глобальные сплайны широко используются в вычислительной практике.

В заключение данного раздела дадим развернутое определение глобального интегрально-дифференциального сплайна.

Функция $S_m(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{m,i}(x)$, которая определена на отрезке $[a, b]$, принадлежит классу гладкости $C_r[a, b]$ и составлена из совокупности звеньев $S_{m,i}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, определенных на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ сетки Ω_n, называется алгебраическим *интегрально-дифференциальным сплайном* степени m и дефекта q ($0 \le r \le m$, $q = m - r$) с узлами на сетке Ω_n, если каждое его звено $S_{m,i}(x)$ $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, представляется в виде алгебраического многочлена степени m:

$$S_{m,i}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{k,i}(x - x_i)^k, \tag{4.64}$$

с коэффициентами $a_{k,i}$, выражаемыми из совокупности $(m + 1)$ интегральных и (или) дифференциальных условий согласования:

$$\delta S_{m,i}^{-1}(x_i, x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S_{m,i}(x) - f(x)]\, dx = 0; \tag{4.65}$$

$$\delta S_{m,i}^{(p_1)}(x_j) = S_{m,i}^{(p_1)}(x)\big|_{x=x_j} - f^{(p_1)}(x)\big|_{x=x_j} = 0, \quad j = i, i+1, \qquad (4.66)$$

и из условий стыковки (непрерывности) звеньев $S_{m,i}(x)$ по производным $S_{m,i}^{(p_2)}$:

$$S_{m,i-1}^{(p_2)}(x)\big|_{x=x_i} = S_{m,i}^{(p_2)}(x)\big|_{x=x_i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \qquad (4.67)$$

Здесь p_1 $(0 \le p_1 \le r)$ принимает значения из совокупности нескольких целых чисел, соответствующих порядкам производных, а p_2 — целое число или в общем случае несколько целых чисел, таких, что $0 \le p_2 \le r$, причем ни одно из этих чисел не равно ни одному значению чисел p_1.

Замечания

1. Данное определение является обобщенным и справедливо как для интегрально-дифференциального сплайна, так и для классического дифференциального. В последнем случае условия (4.66) не используются.

2. Условия стыковки (4.67) вместе с дифференциальными условиями согласования (4.66) обеспечивают непрерывность $S_m^{(p)}(x)$, $p = 0, 1, \ldots, r$, во всех внутренних узлах x_i, определяющих точки стыковки звеньев, т. е. $(x_i, S_m(x_i))$, $(i = \overline{1, n-1})$. Это гарантирует выполнение условия $S_m(x) \in C_r[a, b]$.

3. Алгоритм конструирования сплайна сочетает в себе два способа аппроксимации — кусочный и глобальный, и поэтому является кусочно-глобальным. На кусочном способе основан процесс отыскания звеньев сплайна $S_{m,i}(x)$, т. е. коэффициентов $a_{k,i}$ многочлена (4.64), а на глобальном — соединение всех звеньев в единую (многозвенную) функцию $S_m(x)$ $(x \in [a, b])$ со стыковкой звеньев так, чтобы обеспечивалась непрерывность $S_m^{(p)}(x)$ при $p = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. непрерывность как самой функции $S_m(x)$, так и ее производных.

4. Порядки производных p_1, выбранных для условий согласования (4.66), не должны совпадать с порядками производных, используемых в условиях стыковки (4.67), но вся совокупность порядков производных из p_1 и p_2 должна обеспечивать выполнение условия $S_m(x) \in C_r[a, b]$.

5. Интегральное условие согласования (4.65) может быть переписано в виде $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S_{m,i}(x)\,dx = I_i^{i+1}$, и тогда I_i^{i+1} вместе со значениями $f^{(p_1)}(x_i)$, входящими в дифференциальное условие согласования, причисляется к параметрам ИД-сплайна. Данные параметры могут быть заданы при формулировке задачи аппроксимации либо определены при ее решении.

Рассмотрим сначала кубические дифференциальные сплайны, являющиеся традиционными и широко используемыми при интерполяционном восполнении сеточных функций [1], [2], [13], [14], [25], [44].

4.5.2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Рассмотрим задачу восполнения заданной сеточной функции $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $x_i \in [a, b]$ на базе интерполяционных глобальных кубических дифференциальных сплайнов дефекта $q = 1$, т. е. $S_3(x) \in C_2[a, b]$, которая изучена в [1], [2], [13], [25] и др. работах. При этом предположим, что восполняемая функция достаточно гладкая.

Решить эту задачу можно с помощью двух алгоритмов восполнения исходной сеточной функции, различающихся выбором порядков производных, на основе которых записываются условия согласования (4.66). Первый способ, наиболее широко распространенный, соответствует выбору вторых производных $m_i = f_i''$ $(i = \overline{0, n})$, а второй — выбору первых производных $\bar{m}_i = f_i'$.

Оба способа основаны на решении параметрически прямой задачи и весьма близки по характеру вычислительных процедур.

Основные этапы реализации **первого способа**.

Первый этап. Для алгебраического многочлена (полинома)

$$S_{3,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i}(x - x_i) + a_{2,i}(x - x_i)^2 + a_{3,i}(x - x_i)^3, \tag{4.68}$$

относящегося к одному i-му звену сплайна, для которого $x \in [x_i, x_{i+1}]$, выбираются два дифференциальных условия согласования (4.66) с порядком $p_1 = \{0; 2\}$, каждое из которых относится к концам отрезка $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} &\delta S_{3,i}(x)\big|_{x=x_i}(x) = S_{3,i}(x_i) - f(x_i) = 0, \\ &\delta S_{3,i}(x)\big|_{x=x_{i+1}} = S_{3,i}(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) = 0; \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned} &\delta S''_{3,i}(x)\big|_{x=x_i} = S''_{3,i}(x_i) - f''(x_i) = 0, \\ &\delta S''_{3,i}(x)\big|_{x=x_{i+1}} = S''_{3,i}(x_{i+1}) - f''(x_{i+1}) = 0. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Выбор значения $p = 0$ обусловлен тем, что отыскивается $S_3(x)$ — интерполяционный многочлен, а выбор производных порядка $p = 2$ зависит от выбора способа. Условия (4.69), (4.70) задают параметры сплайна f_i, $m_i = f''(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, первые из которых (функциональные) являются определенными, а вторые (дифференциальные) — неопределенными.

Подстановка в соотношения (4.69), (4.70) полинома (4.68) приводит к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_{k,i}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$. Разрешая их, подставляя полученные формулы для $a_{k,i}$ в (4.68) и распространяя этот результат на все частичные отрезки, имеем:

$$\begin{aligned} S_{3,i}(x) = f_i &+ \left(\frac{1}{h_{i+1}}\Delta f_i - \frac{h_{i+1}}{2}m_i - \frac{h_{i+1}}{6}\Delta m_i\right)\cdot(x - x_i) + \\ &+ \frac{m_i}{2}\cdot(x - x_i)^2 + \frac{1}{6h_{i+1}}\Delta m_i\cdot(x - x_i)^3, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \tag{4.71}$$

где $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $\Delta m_i = m_{i+1} - m_i$.

Таким образом, найдена общая формула одного звена сплайна, которая выражается через определенные (f_i) и неопределенные (m_i) параметры $(i = \overline{0, n})$. Эти параметры обеспечивают непрерывность сплайна: $S_{3,i-1}(x)\big|_{x=x_i} = S_{3,i}(x)\big|_{x=x_i}$, $i = \overline{1, n-1}$, и его вторых производных $S''_{3,i-1}(x)\big|_{x=x_i} = S''_{3,i}(x)\big|_{x=x_i}$, $i = \overline{1, n-1}$, для всех внутренних узлов.

Второй этап. При вычислении неопределенных параметров m_i $(i = \overline{0, n})$, входящих в (4.71), с учетом условия стыковки (4.67) для всех внутренних узлов устанавливается связь между f_i и m_i. Эта связь получается путем записи правой части (4.71) для звена $S_{3,i-1}(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$, ее дифференцирования и приравнивания производной правой части (4.71) для звена $S_{3,i}(x)$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ в соответствии с условием стыковки (4.67) ($p_2 = 1$).

Проведя несложные выкладки и распространив найденное соотношение на все внутренние узлы, получим параметрическую систему — систему линейных алгебраических уравнений трехдиагонального вида, устанавливающую линейную связь комбинаций определенных f_i и неопределенных параметров m_i во внутренних узлах:

$$\frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}m_i + \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} = \frac{\Delta f_i}{h_{i+1}} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{4.72}$$

Данная система относительно m_i $(i = \overline{0, n})$ является незамкнутой, так как не хватает двух уравнений. Для ее замыкания используют различные пути выбора аппроксимаций производных на концах (граничных условий):

1. В простейшем случае вторые производные на концах (краевые условия) принимаются нулевыми, т. е.

$$m_0 = 0; \ m_n = 0.$$

Такие краевые условия называются условиями *натурального сплайна*.

Из рисунка 4.11 видно, что задание условий $m_0 = 0$ и $m_n = 0$ приводит к разрыву вторых производных $f''(x)\big|_{x=x_0}$ и $f''(x)\big|_{x=x_n}$ на концах отрезка $[a, b]$, что может вызвать возрастание погрешности интерполирования.

2. Для первых двух и последних двух отрезков можно применить условие равенства третьей производной. Тогда для этих отрезков получается соотношение $\Delta m_{k-1}/h_k = \Delta m_k/h_{k+1}$ ($k = 1,\ n-1$). Отсюда следуют два трехточечных уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{m_0}{h_1} - \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)m_1 + \frac{m_2}{h_2} = 0; \\ &\frac{m_{n-2}}{h_{n-1}} - \left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}\right)m_{n-1} + \frac{m_n}{h_n} = 0. \end{aligned} \tag{4.73}$$

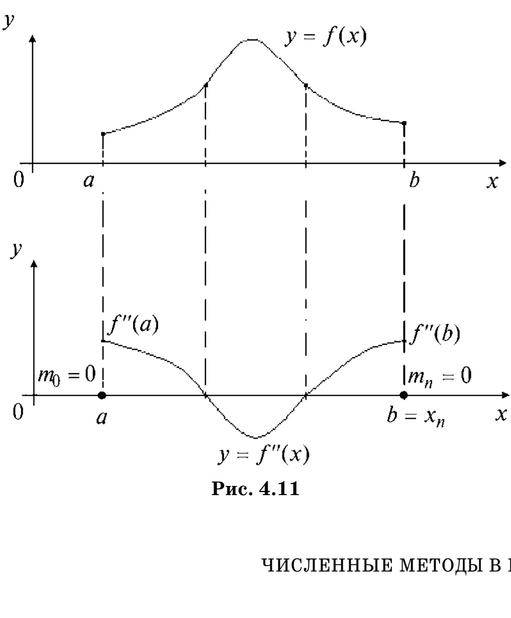


Рис. 4.11

Соотношения (4.73) позволяют замкнуть систему (4.72) при $h = \text{var}$ (неравномерная сетка). При $h = \text{const}$ вторые производные на концах могут быть вычислены по явным формулам второго порядка аппроксимации [6]:

$$m_0 = \frac{1}{h^2}(2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3);$$
$$m_n = \frac{1}{h^2}(-f_{n-3} + 4f_{n-2} - 5f_{n-1} + 2f_n). \qquad (4.74)$$

Отметим, что как (4.73), так и формулы (4.74) для m_0 и m_n имеют порядки аппроксимации, соответствующие порядку сходимости $S_3(x)$ к $f(x)$ (см. п. 2 замечаний ниже).

Третий этап. Определяются значения m_i $(i = \overline{0, n})$ путем решения систем (4.72), (4.73) (параметрически прямая задача). Для этого используется метод прогонки, причем необходимо предварительно из первых двух и последних двух уравнений исключить слагаемые с m_2 и m_{n-2} соответственно. В случае равномерной сетки, как отмечено выше, система (4.72) замыкается аппроксимацией (4.74).

Четвертый этап. Формируются массивы коэффициентов $a_{0,i}$, $a_{1,i}$, $a_{2,i}$, $a_{3,i}$ для всех звеньев сплайна $(i = \overline{0, n-1})$, и определяется глобальный интерполяционный сплайн $S_3(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{3,i}(x)$ путем составления многозвенной функции.

Пятый этап. При необходимости полученная сплайн-функция $S_3(x)$ используется для вычисления значений функции и производных порядка p: $f^{(p)}(x) = S_3^{(p)}(x) + O\left(h_{i+1}^{4-p}\right)$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ в произвольных точках $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, или определенных интегралов $I_a^b = \int_a^b S_3(x)\,dx$ (в приложениях теории приближений).

Основные этапы реализации **второго способа**.

Первый этап. Для алгебраического многочлена (4.68), обозначаемого $\bar{S}_{3,i}(x)$, вместо вторых производных в (4.70) используются первые производные. Тогда эти условия определяют параметры сплайна f_i, $\bar{m}_i = f'(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, первые из которых (функциональные) являются определенными, а вторые (дифференциальные) — неопределенными ($p = 1$). Проделав выкладки (аналогично первому этапу первого способа), получим общую формулу i-го звена искомого сплайна, подобную формуле (4.37), справедливой для звена $\bar{S}_{2,i}(x)$:

$$\bar{S}_{3,i}(x) = f_i + \bar{m}_i \cdot (x - x_i) + \left(\frac{3}{h_{i+1}^2}\Delta f_i - \frac{3}{h_{i+1}}\bar{m}_i - \frac{1}{h_{i+1}}\Delta\bar{m}_i\right)\cdot(x - x_i)^2 +$$
$$+ \frac{1}{h_{i+1}^2}\left(-\frac{2}{h_{i+1}}\Delta f_i + 2\bar{m}_i + \Delta\bar{m}_i\right)(x - x_i)^3, \;\; \Delta\bar{m}_i = \bar{m}_{i+1} - \bar{m}_i, \qquad (4.75)$$

которая зависит от определенных (f_i) и неопределенных $(\bar{m}_i = f')$ параметров сплайна. Данные параметры обеспечивают непрерывность всего сплайна и его производных $\bar{S}_{3,i-1}(x)\big|_{x=x_1} = \bar{S}_{3,i}(x)\big|_{x=x_i}$, $\bar{S}'_{3,i-1}(x)\big|_{x=x_i} = \bar{S}'_{3,i}(x)\big|_{x=x_i}$ во всех внутренних узлах $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$.

Второй этап. С использованием условий стыковки (4.67) по вторым производным ($p_2 = 2$) во внутренних узлах получается система линейных алгебраических уравнений трехдиагонального типа, выражающая параметрическую связь между $\bar{m}_i$ и f_i:

$$\frac{1}{h_i}\bar{m}_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)\bar{m}_i + \frac{1}{h_{i+1}}\bar{m}_{i+1} = 3\left(\frac{\Delta f_{i-1}}{h_i^2} + \frac{\Delta f_i}{h_{i+1}^2}\right), \quad i = \overline{1, n-1}. \qquad (4.76)$$

Замыкание системы (4.76) осуществляется аналогично пункту 2 на втором этапе реализации первого способа. При $h = \text{var}$ получаются два соотношения (граничные условия), не нарушающие трехдиагональность системы:

$$\begin{aligned} &\bar{m}_0 + \frac{H_1^2}{h_2}\bar{m}_1 = \frac{h_1^2}{H_1^2}\left(\frac{2H_1^2 + h_1}{h_1^3}\Delta f_0 + \frac{1}{h_2^2}\Delta f_1\right); \\ &\frac{H_{n-1}^n}{h_{n-1}}\bar{m}_{n-1} + \bar{m}_n = \frac{h_n^2}{H_{n-1}^n}\left(\frac{1}{h_{n-1}^2}\Delta f_{n-2} + \frac{2H_{n-1}^n + h_n}{h_n^3}\Delta f_{n-1}\right), \end{aligned} \qquad (4.77)$$

где $H_{k-1}^k = h_{k-1} + h_k$ ($k = 2, n$).

Соотношения (4.77) аппроксимируют производные на концах с третьим порядком точности, что соответствует четвертому порядку сходимости $\bar{S}_3(x)$ к $f(x)$ (см. п. 2 замечаний ниже). При $h = \text{const}$ для определения значений производных на концах можно использовать соответствующие аппроксимационные формулы (см. главу 5).

Третий этап. Трехдиагональная система линейных алгебраических уравнений (4.76), (4.77) при конструировании глобального сплайна решается методом прогонки (параметрически прямая задача).

Четвертый и пятый этапы аналогичны изложенным для первого способа.

Замечания

1. Существование и единственность глобальных сплайнов $S_3(x)$ и $\bar{S}_3(x)$ следуют из рассмотренного выше построения общих формул их звеньев $S_{3,i}(x)$, $\bar{S}_{3,i}(x)$ и единственности решения трехдиагональных систем (4.72), (4.73) или (4.74) и (4.76), (4.77) в силу выполнения условия диагонального преобладания.

2. Сходимость процесса построения глобальных сплайнов $S_{3,i}(x)$, $\bar{S}_{3,i}(x)$ доказывается для непрерывных (формульных) функций, таких, что $f(x) \in C_4[a, b]$. Процесс является *сходящимся*, если при неограниченном увеличении числа n узлов сетки соответствующая последовательность сплайн-функций, построенных на этих сетках, сходится к исходной функции $f(x)$. Доказано, что на равномерной сетке сплайн-функции $S_{3,i}(x)$, $\bar{S}_{3,i}(x)$ сходятся к $f(x) \in C_4[a, b]$ с четвертым порядком, причем справедливы оценки

$$\left\| f^{(p)}(x) - S_3^{(p)}(x) \right\|_{C[a,b]} = \max_{[a,b]} \left| f^{(p)}(x) - S_3^{(p)}(x) \right| \le M_4 h^{4-p}, \quad p = 0, 1, 2. \qquad (4.78)$$

Таким образом, при использовании сплайн-функций для вычисления производных также реализуется сходимость, но ее порядок понижается на величину p.

3. В соответствии с принципом соответствия порядков аппроксимации (см. п. В.4) точность вычисления интегралов на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, т. е. $I_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \hat{I}_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S_3(x)dx$, на основе сплайнов $S_{3,i}(x)$, $\bar{S}_{3,i}(x)$ составляет $O\left(h_{i+1}^5\right)$, а интеграла $I_a^b = \int\limits_a^b f(x)dx$ на отрезке $[a, b]$ составляет $O(H^4)$, $H = \max\limits_i h_{i+1}$ (потеря порядка происходит из-за суммирования значений $\hat{I}_i^{i+1}$ и остаточного слагаемого при переходе от $\hat{I}_i^{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$, к $\hat{I}_a^b = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \hat{I}_i^{i+1}$).

4. Выражая из системы (4.72) комбинацию значений функций f_{i-1}, f_i, f_{i+1} через комбинацию m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, получаем трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений относительно f_i:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_i} f_{i-1} - \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) f_i + \frac{1}{h_{i+1}} f_{i+1} = \\ &= \frac{h_i}{6} m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} m_i + \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Если считать, что вторые производные для некоторой функции $y_i = f(x_i)$ заданы или каким-либо способом определены, а f_0 и f_n на концах $[a, b]$ известны, то из (4.79) можно восстановить значения $\tilde{f}_i$ во внутренних узлах x_i $(i = \overline{1, n-1})$ путем решения параметрически обратной задачи. В этом случае сплайн $S_3(x)$, построенный по $\tilde{f}_i$, m_i $(i = \overline{0, n})$ и (4.71), является в строгом понимании не интерполяционным, а восстанавливающим функцию $y_i = f(x_i)$. Единственность решения задачи обеспечивается преобладанием диагональных коэффициентов в системе (4.79) относительно значений f_i $(i = \overline{0, n})$.

5. На основе соотношения (4.76) при заданных двух значениях функций f_0, f_1 или f_{n-1}, f_n и всех значениях m_i $(i = \overline{0, n})$ можно восстановить функцию $\tilde{f}(x_i)$ во всех точках сетки x_i $(i = \overline{2, n})$. С этой целью система (4.76) разрешается относительно приращений функций Δf_i, которые затем вычисляются рекуррентно. При задании неравномерной сетки устойчивость процесса достигается при регулярном сгущении сетки в направлении слева направо $\left(\delta_{i+1} = \dfrac{h_{i+1}}{h_i} \le 1\right)$ или при ее регулярном разрежении $(\delta_{i+1} > 1)$. В первом случае восстановление осуществляется слева направо при заданных f_0, f_1:

$$\Delta f_i = -\delta_{i+1}^2 \Delta f_{i-1} + L_h(\bar{m}_{i-1}, \bar{m}_i, \bar{m}_{i+1}),$$

где $L_h = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{h_i}\bar{m}_{i-1} + 2\cdot\left(\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{1}{h_{i+1}}\right)\cdot \bar{m}_i + \dfrac{1}{h_{i+1}}\bar{m}_{i+1}\right]$, а во втором — справа налево при заданных f_n, f_{n-1}. Такой алгоритм обеспечивает устойчивость процесса обратной прогонки.

6. Локальный способ построения интерполяционных кубических сплайнов для заданной функции $y_i = f(x_i)$ основан на многочлене (4.75) и состоит в определении $\bar{m}_i$, $i = \overline{0, n}$, по аппроксимационным формулам третьего поряд-

ка (см. главу 5 и [6]), в дальнейшей их подстановке в (4.75) и в формировании $\bar{S}_3(x)=\bigcup_{i=0}^{n-1}\bar{S}_{3,i}(x)$. Необходимость аппроксимации третьего порядка следует из принципа соответствия порядков, изложенного в п. В.4, а также из параметрической связи (4.76).

Методика построения интерполяционного кубического сплайна (первый способ)

1. Используя систему (4.72) , условия $m_0=0$, $m_n=0$ или (4.73) (при h = const можно использовать условия (4.74)), сформировать замкнутую систему относительно неопределенных параметров.

2. Вычислить коэффициенты системы (4.72), зависящие от шагов сетки Ω_n, и решить ее методом прогонки. В результате найти неопределенные параметры $m_0, m_1, \ldots, m_n$.

3. Записать выражения для звеньев сплайна по формуле (4.71):

$$S_{3,i}(x)=f_i+\left(\frac{1}{h_{i+1}}\Delta f_i-\frac{h_{i+1}}{2}m_i-\frac{h_{i+1}}{6}\Delta m_i\right)\cdot(x-x_i)+$$

$$+\frac{m_i}{2}\cdot(x-x_i)^2+\frac{1}{6h_{i+1}}\Delta m_i\cdot(x-x_i)^3,\ \ i=\overline{0,n-1},$$

вычислить коэффициенты звеньев и сформировать многозвенную сплайн-функцию $S_3(x)=\bigcup_{i=0}^{n-1}S_{3,i}(x)$, являющуюся сплайном дефекта q = 1.

Пример 4.13. Для сеточной функции $y_i=\cos x_i$, $x_i=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$ $(i=\overline{0,3})$ найти интерполяционную кубическую сплайн-функцию $S_3(x)$ первым способом.

□В поставленной задаче $x_0=0$; $x_1=\frac{\pi}{6}$; $x_2=\frac{\pi}{3}$; $x_3=\frac{\pi}{2}$, $n=3$, $h=\pi/6=\text{const}$; $f_0=f(x_0)=1$; $f_1=f(x_1)=0{,}8660254$; $f_2=f(x_2)=0{,}50000$; $f_3=f(x_3)=0$.

1. Запишем систему (4.72) для внутренних узлов:

$$\frac{h_1}{6}m_0+\frac{h_1+h_2}{3}m_1+\frac{h_2}{6}m_2=\frac{f_2-f_1}{h_2}-\frac{f_1-f_0}{h_1},$$

$$\frac{h_2}{6}m_1+\frac{h_2+h_3}{3}m_2+\frac{h_3}{6}m_3=\frac{f_3-f_2}{h_3}-\frac{f_2-f_1}{h_2}.$$

В силу того, что $h=h_1=h_2=h_3=\pi/6=\text{const}$, для нахождения значений m_0, m_3 выбираются формулы (4.74):

$$m_0=\frac{1}{h^2}(2f_0-5f_1+4f_2-f_3),$$

$$m_3=\frac{1}{h^2}(-f_0+4f_1-5f_2+2f_3).$$

2. Вычислим коэффициенты системы и значения m_0, m_3:

$$m_0 = \frac{36}{\pi^2}(2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3) = \frac{36}{\pi^2}(2\cdot 1 - 5\cdot 0{,}8660254 + 4\cdot 0{,}5 + 0) = -1{,}2041589;$$

$$\frac{\pi}{36}m_0 + \frac{2\pi}{18}m_1 + \frac{\pi}{36}m_2 = \frac{6}{\pi}(f_2 - 2f_1 + f_0);$$

$$\frac{\pi}{36}m_1 + \frac{2\pi}{18}m_2 + \frac{\pi}{36}m_3 = \frac{6}{\pi}(f_3 - 2f_2 + f_1);$$

$$m_3 = \frac{36}{\pi^2}(-f_0 + 4f_1 - 5f_2 + 2f_3) = \frac{36}{\pi^2} = (-1 + 4\cdot 0{,}8660254 - 5\cdot 0{,}5 + 0) = -0{,}1309416.$$

Решение этой системы методом прогонки (см. п. 1.2.2): $m_1 = -0{,}84642$; $m_2 = -0{,}4886807$.

3. Подставляя параметры m_i, $i = 0, 1, 2, 3$, в формулу звена сплайна $S_{3,i}(x)$, получаем следующую трехзвенную сплайн-функцию:

$$S_3(x) = \begin{cases} 1 + \left(-\frac{6}{\pi}\cdot 0{,}13397 + \frac{\pi}{12}\cdot 1{,}20416 - \frac{\pi}{36}\cdot 0{,}35774\right)\cdot(x-0) - \\ -\frac{1{,}20416}{2}\cdot(x-0)^2 + \frac{1}{\pi}\cdot 0{,}35774\cdot(x-0)^3 \text{ при } x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]; \\ 0{,}86602 + \left(-\frac{6}{\pi}\cdot 0{,}3660 + \frac{\pi}{12}\cdot 0{,}84642 - \frac{\pi}{36}\cdot 0{,}35774\right)\cdot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \\ -\frac{0{,}84642}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{\pi}\cdot 0{,}35774\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 \text{ при } x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]; \\ 0{,}5 + \left(-\frac{6}{\pi}\cdot 0{,}5 + \frac{\pi}{12}\cdot 0{,}48868 - \frac{\pi}{36}\cdot 0{,}35774\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \\ -\frac{0{,}48868}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{\pi}\cdot 0{,}35774\cdot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 \text{ при } x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

или

$$S_3(x) = \begin{cases} 1 + 0{,}02816x - 0{,}60208x^2 + 0{,}11387x^3 \text{ при } x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]; \\ 0{,}86602 - 0{,}50864\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - 0{,}42321\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 + 0{,}11387\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 \text{ при } x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]; \\ 0{,}5 - 0{,}8582\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - 0{,}24434\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + 0{,}11387\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 \text{ при } x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Полученная сплайн-функция является непрерывной и обеспечивает непрерывность первых и вторых производных.■

4.5.3. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Выше отмечено, что применение параболических сплайнов более оправданно при аппроксимационной обработке широкого класса сеточных функций, например, рассчитанных методами сеток второго и третьего порядка. Сплайн-методы развиваются и как самостоятельный класс методов решения задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями (см. главу 6).

Следует отметить, что широко распространенные на практике кубические дифференциальные сплайны теоретически обеспечивают четвертый порядок сходимости. Однако для их корректного применения необходимо, чтобы исходные данные (аппроксимируемая функция $y_i = f(x_i)$) были заданы с порядком точности, не меньшим третьего. Это условие при обработке рассчитанных на основе методов сеток функций $y_i = f(x_i)$, как правило, не выполняется, и поэтому применять кубические сплайны не всегда целесообразно. Это обусловливает необходимость использования параболических сплайн-функций. Однако полученные традиционным способом сплайны $S_2(x)$ неустойчивы в смысле отсутствия их сходимости к исходной функции, что связано с несимметричным характером задания условий согласования и, как следствие, с аналогичным характером граничных условий. Поэтому для регуляризации сплайнов $S_2(x)$ Шенберг в [59] построил такой алгоритм аппроксимации с помощью Д-сплайнов, в котором узлы сплайна сдвинуты относительно узлов сеточной функции. Для нахождения параметров этого сплайна глобальным способом получается трехдиагональная система линейных алгебраических уравнений с преобладанием диагональных элементов. Однако такая модификация существенно усложняет расчетные формулы алгоритма, и в ней используется дополнительное, обычно в задачах не требующееся условие непрерывности производных в серединах отрезков между узлами интерполяции. В ряде случаев это дополнительное требование может привести к непредсказуемому снижению точности аппроксимации и к отсутствию сходимости.

Рассмотрим принцип построения параболических дифференциальных сплайнов со сдвигом узлов сплайна, следуя [44].

Пусть исходная функция $y_i = f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$, задана в узлах $x_i \in [a, b]$, называемых *узлами интерполяции* и принадлежащими некоторой *сетке* Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$ $(n \geq 2)$. Введем также в рассмотрение другую сетку $\overline{\Delta}$: $a=\overline{x}_0<\overline{x}_1<\ldots<\overline{x}_n<b=\overline{x}_{n+1}$, узлы которой сдвинуты по отношению к узлам сетки Δ влево, так что $x_{i-1}<\overline{x}_i<x_i$ $(i=\overline{1,n})$.

Функция $S_2(x)=\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} S_{2,i}(x)$ называется *интерполяционной параболической сплайн-функцией*, интерполирующей $f(x_i)$ на сетке Δ и принадлежащей классу гладкости $C_1[a, b]$, если она составлена из совокупности звеньев $S_{2,i}(x)$ $(i=\overline{0,n+1})$, определенных на каждом частичном отрезке $\left[\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1}\right]$ сетки $\overline{\Delta}$ и представленных в виде алгебраических многочленов второй степени:

$$S_{2,i}(x)=\sum_{k=0}^{2} a_{k,i}(x-\overline{x}_i)^k = a_{0,i}+a_{1,i}\cdot(x-\overline{x}_i)+a_{2,i}\cdot(x-\overline{x}_i)^2, \tag{4.80}$$

где $a_{k,i}$ – коэффициенты, которые находятся из дифференциальных условий согласования

$$\delta S_{2,i}^{(p_1)}(x_k)=S_{2,i}^{(p_1)}(x)\big|_{x=\overline{x}_k} - f^{(p_1)}(x)\big|_{x=\overline{x}_k}=0 \quad (k=i,i+1), \tag{4.81}$$

где $p_1 = 0$ или $p_1 = 1$. Звенья затем стыкуются по условию непрерывности (стыковки):

$$S_{2,i-1}^{(p_2)}(x)\big|_{x=\overline{x}_i}=S_{2,i}^{(p_2)}(x)\big|_{x=\overline{x}_i} \tag{4.82}$$

с порядками p_2, отличными от p_1, но такими, что $0 \leq p_2 \leq 2$.

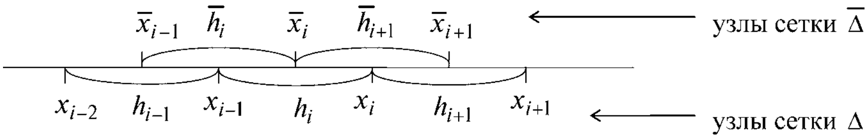


Рис. 4.12

В соответствии с этим определением приведем два сплайна $S_2(x)$ и $\bar{S}_2(x)$ и рассмотрим алгоритм построения одного из них, а именно $S_2(x)$.

Для некоторого отрезка $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ формула $S_{2,i}(x)$ имеет вид (4.80)

$$S_{2,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i} \cdot (x - \bar{x}_i) + a_{2,i} \cdot (x - \bar{x}_i)^2.$$

На отрезке $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ для определения $a_{0,i}$, $a_{1,i}$, $a_{2,i}$ используются условия согласования (4.81):

$$\delta S_{2,i}(x_i) = 0, \;\; \delta S'_{2,i}(\bar{x}_i) = 0, \;\; \delta S'_{2,i}(\bar{x}_{i+1}) = 0.$$

Для простоты предположим, что узлы сплайна расположены в серединах отрезков $[x_i,\ x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, составленных по узлам интерполяции.

На рисунке 4.12 изображена схема расположения узлов сетки $\bar{\Delta}$ по отношению к узлам сетки Δ. Между шагами сеток Δ и $\bar{\Delta}$ в этом случае существует простая связь

$$\bar{h}_{i+1} = \frac{h_i}{2} + \frac{h_{i+1}}{2} = \frac{H_i^{i+1}}{2}.$$

Из условия $\delta S'_{2,i}(\bar{x}_i) = 0$ следует равенство $a_{1,i} = \bar{m}_i$ $\left(\bar{m}_i = f'(\bar{x}_i)\right)$, а из условия $\delta S'_{2,i}(\bar{x}_{i+1}) = 0$ вытекает, что

$$\bar{m}_i + 2a_{2,i}\frac{H_i^{i+1}}{2} = \bar{m}_{i+1}; \;\; a_{2,i} = \frac{\Delta \bar{m}_i}{H_i^{i+1}}.$$

Из условия интерполяции $\delta S_{2,i}(x_i) = 0$ определяется коэффициент

$$a_{0,i} = f_i - \frac{h_i}{2}\bar{m}_i - \frac{h_i^2 \Delta \bar{m}_i}{4H_i^{i+1}}.$$

Итак, звено сплайна $S_{2,i}(x)$ на произвольном отрезке $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ выражается формулой

$$S_{2,i}(x) = f_i - \frac{h_i}{2}\bar{m}_i - \frac{h_i \Delta \bar{m}_i}{4(1+\delta_{i+1})} + \bar{m}_i \cdot (x - \bar{x}_i) + \frac{\Delta \bar{m}_i}{h_i(1+\delta_{i+1})} \cdot (x - \bar{x}_i)^2, \qquad (4.83)$$

где $\delta_k = h_{k+1}/h_k$ $(k = 1, 2, \ldots, i, i+1, \ldots)$.

Подставив (4.83) в (4.82), получим параметрическую систему относительно $\bar{m}_i$:

$$\left(\frac{h_i}{2} - \frac{\delta_i}{4(\delta_i + 1)} H_{2(i-1)}^i\right)\bar{m}_{i-1} + \frac{h_i}{4}\left(\frac{2\delta_{i+1} + 1}{\delta_{i+1} + 1} + \frac{H_{2(i-1)}^i}{h_{i-1}(\delta_i + 1)}\right)\bar{m}_i + \\ + \frac{h_i}{4(\delta_{i+1} + 1)}\bar{m}_{i+1} = \Delta f_{i-1}, \;\; i = \overline{1, n}, \qquad (4.84)$$

где $H_{2(i-1)}^{i} = 2h_{i-1} + h_i$. Система (4.84) обладает свойством преобладания диагональных элементов, но она незамкнута, так как число неопределенных параметров равно $n + 2$. В качестве двух дополнительных уравнений (граничных условий) могут быть приняты значения производных, аппроксимированных на концах со вторым порядком аппроксимации (см. главу 5):

$$\begin{aligned} \bar{m}_0 &\equiv \bar{f}_0' = \frac{1}{\bar{H}_1^2}\cdot\left(-\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2}\bar{f}_2 + \frac{\left(\bar{H}_1^2\right)^2}{\bar{h}_1\bar{h}_2}\bar{f}_1 - \frac{\bar{H}_1^2 + \bar{h}_1}{\bar{h}_1}\bar{f}_0\right), \\ \bar{m}_{n+1} &\equiv \bar{f}_{n+1}' = \frac{1}{\bar{H}_n^{n+1}}\cdot\left(\frac{\bar{H}_n^{n+1} + \bar{h}_{n+1}}{\bar{h}_{n+1}}\bar{f}_{n+1} - \frac{\left(\bar{H}_n^{n+1}\right)^2}{\bar{h}_n\bar{h}_{n+1}}\bar{f}_n + \frac{\bar{h}_{n+1}}{\bar{h}_n}\bar{f}_{n-1}\right), \end{aligned} \tag{4.85}$$

где $\bar{H}_n^{n+1} = \bar{h}_n + \bar{h}_{n+1}$, $\bar{f}_i = f(\bar{x}_i)$. Здесь шаги $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_{n-1}$, $\bar{h}_n$, $\bar{h}_{n+1}$ и их комбинации взяты на сетке $\bar{\Delta}$. После определения всех параметров $\bar{m}_i$ их подставляют во все звенья $S_{2,i}(x)$, $i = \overline{0,n}$, из которых затем формируется результирующая многозвенная сплайн-функция $S_2(x)$, имеющая минимальный дефект $q = 1$.

При $h = \text{const}$ формулы (4.83), (4.84), (4.85) упрощаются:

$$\begin{gathered} S_{2,i}(x) = f_i - \frac{h}{2}\bar{m}_i - \frac{h}{8}\Delta\bar{m}_i + \bar{m}_i(x - \bar{x}_i) + \frac{\Delta\bar{m}_i}{2h}(x - \bar{x}_i)^2 \quad (i = \overline{0, n+1}); \\ \bar{m}_{i-1} + 6\bar{m}_i + \bar{m}_{i+1} = \frac{8\Delta f_{i-1}}{h} \quad (i = \overline{1, n}), \\ \bar{m}_0 = \frac{1}{2h}(-3\bar{f}_{0\text{д}} + 4\bar{f}_1 - \bar{f}\,); \;\; \bar{m}_{n+1} = \frac{1}{2h}(\bar{f}_{n-1} - 4\bar{f}_n + 3\bar{f}_{n+1\text{д}}). \end{gathered} \tag{4.86}$$

Здесь вместо сетки $\bar{\Delta}$ используется равномерная сетка $\bar{\Delta}_\text{д} = (\bar{x}_{0\text{д}}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1\text{д}})$, где $\bar{x}_{0\text{д}} = a - \frac{h}{2}$, $\bar{x}_{n+1\text{д}} = b + \frac{h}{2}$ — дополнительные узлы; $\bar{f}_{0\text{д}} = f(\bar{x}_{0\text{д}})$, $\bar{f}_{n+1\text{д}} = f(\bar{x}_{n+1\text{д}})$.

Другой параболический сплайн $\bar{S}_{2,i}(x)$ интерполяционного типа приведен в [44], и он построен для более общего случая, когда узлы $\bar{x}_i$ не совпадают с серединами отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. При этом $\bar{S}_{2,i}(x)$ записывается для отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ с узлами интерполяции x_i, x_{i+1}:

$$\bar{S}_{2,i}(x) = f_i + \bar{m}_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - \bar{x}_{i+1})_+^2, \tag{4.87}$$

где, как и раньше, $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i$, $(i = \overline{1,n})$, а

$$(x - \bar{x}_{i+1})_+ = \begin{cases} x - \bar{x}_{i+1} \text{ при } x > \bar{x}_{i+1}, \\ 0 \text{ при } x \le \bar{x}_{i+1}. \end{cases} \tag{4.88}$$

Здесь коэффициенты при $(x - x_0)^0$ и $(x - x_i)^1$ найдены с учетом условий согласования $\delta\bar{S}_{2,i}(x_i) = 0$ и $\delta\bar{S}_{2,i}'(x_i) = 0$. Коэффициенты c_i и d_i определяются из аналогичных условий согласования, но заданных в точке x_{i+1} отрезка $[x_i, x_{i+1}]$:

$$d_i = \frac{\Delta f_i}{\bar{h}_{i+1}(\bar{h}_{i+1} - h_{i+1})} - \frac{\bar{m}_i + \bar{m}_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_{i+1}}{\bar{h}_{i+1}(\bar{h}_{i+1} - h_{i+1})};$$
$$c_i = \frac{\Delta \bar{m}_i}{2h_{i+1}} - \frac{\Delta f_i}{h_{i+1}(\bar{h}_{i+1} - h_{i+1})} + \frac{\bar{m}_i + \bar{m}_{i+1}}{2(\bar{h}_{i+1} - h_{i+1})}. \qquad (4.89)$$

Тогда для получения связи определенных и неопределенных параметров используется условие стыковки (4.82) при $p_2 = 2$, т. е. условие непрерывности второй производной в точке x_i: $\bar{S}''_{2,i-1}(x)\big|_{x=x_i} = \bar{S}''_{2,i}(x)\big|_{x=x_i}$. Учтем, что $\bar{S}''_{2,i-1}(x)\big|_{x=x_i} = c_{i-1} + d_{i-1}$, а $\bar{S}''_{2,i}(x)\big|_{x=x_i} = c_i$ в силу (4.88).

Подставляя в выражение $c_{i-1} + d_{i-1} = c_i$ соотношения (4.89), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров $\bar{m}_i$ $(i = \overline{1, n-1})$:

$$\frac{h_i - \bar{h}_i}{\bar{h}_i h_i}\bar{m}_{i-1} + \left(\frac{h_i + \bar{h}_i}{h_i \bar{h}_i} + \frac{2h_{i+1} - \bar{h}_{i+1}}{h_{i+1}(h_{i+1} - \bar{h}_{i+1})}\right) \cdot \bar{m}_i + \frac{\bar{h}_{i+1}}{h_{i+1}(h_{i+1} - \bar{h}_{i+1})}\bar{m}_{i+1} =$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{\Delta f_{i-1}}{h_i \bar{h}_i} + \frac{\Delta f_i}{h_{i+1}(h_{i+1} - \bar{h}_{i+1})}\right), \; i = \overline{1, n-1}. \qquad (4.90)$$

В качестве двух недостающих условий могут быть взяты аппроксимационные выражения (4.85). Случаи задания других типов краевых условий приведены в [44] и здесь не рассматриваются.

Отметим, что алгоритм построения рассмотренного сплайна является достаточно сложным, так как $\bar{S}_{2,i}(x)$ имеет дополнительное слагаемое $d_i(x - \bar{x}_{i+1})_+^{\,2}$, а коэффициенты сплайна и системы (4.90) зависят от шагов h и $\bar{h}$, характеризующих две сетки Δ и $\bar{\Delta}$, которые также достаточно сложны. Кроме того, требование непрерывности второй производной, присущее сплайну второй степени, может привести не к улучшению качества аппроксимации, а к ее ухудшению, так как эта производная для $\bar{S}_2(x)$ является константой.

Методика построения параболического сплайна аналогична методике, изложенной в п. 4.5.2 для кубических сплайнов.

Замечание. Использование интегрального подхода (ИД-сплайна), предложенного в [15–21] и изложенного в п. 4.5.4, 4.5.5, позволяет строить устойчивые алгоритмы аппроксимации функций параболическими сплайнами без смещения узлов сплайна относительно узлов интерполяции. Кроме того, эти сплайны являются консервативными, в том смысле, что интегралы от $S_2(x)$ и $y_i = f(x_i)$ равны как на $[a, b]$, так и на всех частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = \overline{0, n-1})$. С помощью интегрального подхода могут быть построены замкнутые алгоритмы аппроксимации сплайнами произвольной четной степени [21].

Пример 4.14. Для сеточного представления функции $y = x^3$, т. е. $y_i = x_i^3$ $(x_i = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2)$, $(i = \overline{0,4})$, найти интерполяционную параболическую сплайн-функцию $S_2(x)$ со сдвигом узлов на основе формул (4.86).

□Для построения равномерной сетки $\bar{\Delta}_д$ введем в рассмотрение фиктивные узлы $\bar{x}_{0д} = -\frac{5}{2}$; и $\bar{x}_{5д} = \frac{5}{2}$ со значениями функции $\bar{f}_{0д} = -15{,}625$ и $\bar{f}_{5д} = 15{,}625$. Таким образом, будем определять сплайн $S_2(x)$ на отрезке $[-2{,}5;\ 2{,}5]$ с сетками $\bar{\Delta}_д = \{-2{,}5; -1{,}5; -0{,}5; 0{,}5; 1{,}5; 2{,}5\}$, $\Delta = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

1. Запишем систему (4.86):

$$\bar{m}_0 = \frac{1}{2h}(-3\bar{f}_{0д} + 4\bar{f}_1 - \bar{f}_2),$$

$$\bar{m}_{i-1} + 6\bar{m}_i + \bar{m}_{i+1} = \frac{8\Delta f_{i-1}}{h}, \quad i = \overline{1,4};$$

$$\bar{m}_5 = \frac{1}{2h}(\bar{f}_3 - 4\bar{f}_4 + 3\bar{f}_{5д}).$$

2. Вычислим значения производных на концах отрезка [−2,5; 2,5]:

$$\bar{m}_0 = \frac{1}{2}[-3\cdot(-15{,}625) + 4\cdot(-3{,}375) + 0{,}125] = 16{,}75;$$

$$\bar{m}_5 = \frac{1}{2}(0{,}125 - 4\cdot 3{,}375 + 3\cdot 15{,}625) = 16{,}75.$$

Составим трехдиагональную систему относительно $\bar{m}_i$:

$$\bar{m}_0 = 16{,}75;$$
$$\bar{m}_0 + 6\bar{m}_1 + \bar{m}_2 = 8\cdot 7 = 56 \quad (\Delta f_0 = 7);$$
$$\bar{m}_1 + 6\bar{m}_2 + \bar{m}_3 = 8\cdot 1 = 8 \quad (\Delta f_1 = 1);$$
$$\bar{m}_2 + 6\bar{m}_3 + \bar{m}_4 = 8\cdot 1 = 8 \quad (\Delta f_2 = 1);$$
$$\bar{m}_3 + 6\bar{m}_4 + \bar{m}_5 = 8\cdot 7 = 56 \quad (\Delta f_3 = 7);$$
$$\bar{m}_5 = 16{,}75.$$

Решим систему методом прогонки. В результате получаем значения производных $\bar{m}_i$ (табл. 4.21).

Таблица 4.21

$\bar{x}_i$	$\bar{x}_{0д} = -2{,}5$	−1,5	−0,5	0,5	1,5	$\bar{x}_{5д} = 2{,}5$
$\bar{m}_i$	16,75	6,5061	0,2134	0,2134	6,5061	16,75
i	0	1	2	3	4	5

3. Построим многозвенную (в данном случае пятизвенную) сплайн-функцию $S_2(x)$. Для простоты ограничимся построением многочлена только для одного звена $S_{2,0}(x)$:

$$S_{2,0}(x) = -15{,}625 - 0{,}5\cdot 16{,}75 - \frac{1}{8}\cdot(6{,}5061 - 16{,}75) + 16{,}75\cdot(x+2{,}5) +$$
$$+\frac{(6{,}5061 - 16{,}75)}{2}\cdot(x+2{,}5)^2 = -22{,}719 + 16{,}75\cdot(x+2{,}5) - 5{,}1220\cdot(x+2{,}5)^2.$$

остальные звенья строятся аналогично.■

4.5.4. ВОССТАНАВЛИВАЮЩИЕ, ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ И СГЛАЖИВАЮЩИЕ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

В п. 4.3 приведены два интегрально-дифференциальных многочлена (4.37) (4.41), которые могут использоваться для интерполяции и сглаживания некоторых функций, заданных своими значениями и интегралами, либо интегралами и производными.